

# Sinais e Sistemas - ESP208

Mestrado Profissional em Engenharia de Sistemas e Produtos

Transformada Z

Fabício Simões

IFBA

08 de novembro de 2017



## Transformada de Fourier - Vantagem

Análise direta do espectro (componentes de frequência) do sinal discreto.

## Transformada de Fourier - Desvantagem

- Não é adequado ao projeto de Filtros e Controladores Digitais;
- Existem muitos sinais e sistemas discretos cuja transformada de Fourier não existe.

# Transformada Z

- A Transformada de Fourier para sinais/sistemas discretos é um caso específico da Transformada Z.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(z) = X_d(\omega)|_{z=re^{j\omega}} \text{ para } r = 1$$

- Critério de convergência das Transformadas de Fourier e Z.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |r^{-n}| < \infty$$

A convergência depende também dos valores de  $r$ , ou seja do  $|z|$ .

$$X(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{iM})}{(z - z_{p1})(z - z_{p2}) \dots (z - z_{pN})}$$

- $z_i$ ,  $i$ -ésimo zero de  $X(z)$ , ou seja, as raízes do polinômio do numerador  $N(z)$ .
- $z_{p,i}$ ,  $p$ -ésimo pólo de  $X(z)$ , ou seja, as raízes do polinômio do denominador  $D(z)$ .

## Exercício

- **Determine a Transformada Z do sinal  $x[n] = a^n u[n]$**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}$$

- Determine os pólos e zeros.

# Região de Convergência - Propriedades

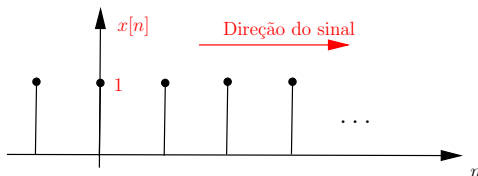
- A região de convergência pode ser um disco ou um anel centrado na origem;
- A região de convergência não contém pólos;
- Se a região de convergência contém a circunferência unitária ( $r = 1$ ) existe a transformada de Fourier.

A região de convergência pode ser definida a partir do comportamento da função (sinal ou sistema). Para isso, as funções são classificadas como :

- Sequência Unilateral a Direita;
- Sequência Unilateral a Esquerda;
- Sequência Bilateral;
- Sequência de Duração Finita.

# Sequência Unilateral a Direita

- Sinal de duração ilimitada que progride em direção a valores positivos de  $n$



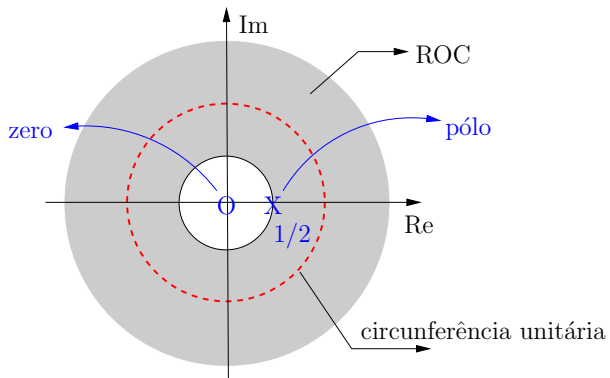
## Região de Convergência

A região de convergência (ROC) é composta pela área externa ao pólo de maior valor absoluto.

# Exemplo 1

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$X(z) = \frac{z}{z - 1/2}$$

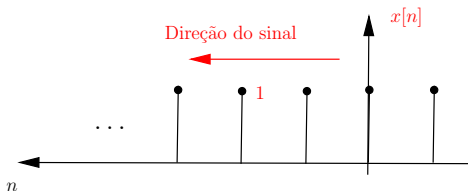


Região de Convergência ROC :  $r > 1/2$



# Sequência Unilateral a Esquerda

- Sinal de duração ilimitada que progride em direção a valores negativos de  $n$ .



## Região de Convergência

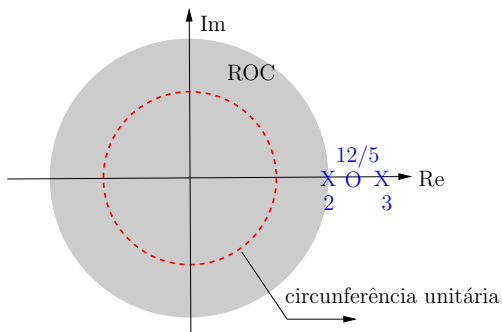
A região de convergência (ROC) é composta pela área interna ao pólo de menor valor absoluto.

## Exemplo 2

$$x[n] = (2^n + 3^n)u[-n]$$

$$X(z) = \frac{2 - 5z/6}{(1 - z/2)(1 - z/3)}$$

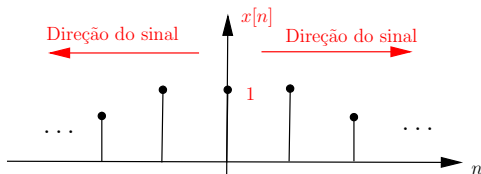
- Pólos:  $p_1 = 2$  e  $p_2 = 3$ ;
- Zeros:  $z_1 = 12/5$



Região de Convergência ROC :  $r < 2$

# Sequência Bilateral

- Sinal de duração ilimitada que progride em direção aos valores negativos e positivos de  $n$ .



## Região de Convergência

ROC:  $p_1 < r < p_2$ ;

$p_1$  - pólo de maior absoluto que contribui para  $n > 0$ ;

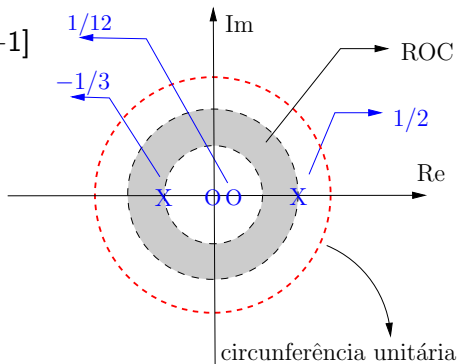
$p_2$  - pólo de menor absoluto que contribui para  $n < 0$ .

## Exemplo 3

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{2z(z - 1/12)}{(z + \frac{1}{3})(z - \frac{1}{2})}$$

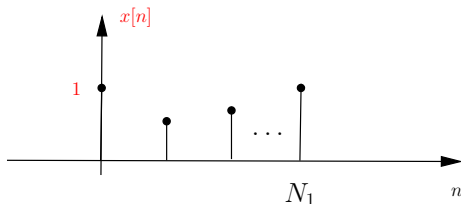
- Pólos:  $p_1 = -1/3$  e  $p_2 = 1/2$ ;
- Zeros:  $z_1 = 0$  e  $z_2 = 1/12$



Região de Convergência ROC :  $1/3 < r < 1/2$

# Sequência de Duração Finita

- Sinal com duração igual a  $N_1$  amostras.



## Região de Convergência

A ROC contém todo plano  $z$ , exceto possivelmente em  $r = 0$  e/ou  $r = \infty$ .

## Exemplo 3

$$x[n] = \delta[n],$$

ROC contém todos os valores de  $z$ , incluindo  $r = 0$  e  $r = \infty$

O sistema é estável se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Mesmo critério de convergência da Transformada de Fourier.

## Critério de Estabilidade

- Um sistema é estável se a ROC contém a circunferência unitária.
- Um sistema Causal é Estável se todos os pólos estiverem dentro do círculo unitário

# Relação Equação a Diferenças e Transformada Z

## Aplicando Transformada Z sobre a Equação a Diferenças

$$\mathcal{Z} \left[ \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] \right] = \mathcal{Z} \left[ \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] \right]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{Z} [y[n-k]] = \sum_{m=0}^M b_m \mathcal{Z} [x[n-m]]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{m=0}^M b_m X(z) z^{-m}$$

## Função de Transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

# Transformada Z - Exemplo

Considere a equação de diferenças

$$y[n] + 5y[n - 1] = x[n - 1] + 4x[n - 3],$$

encontre a função de transferência  $H(z)$ .

Resposta

$$Y(z)(1 + 5z^{-1}) = X(z)(1 + 4z^{-3})$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 4}{z^3 + 5z^2}$$