

Sinais e Sistemas - ESP208

Mestrado Profissional em Engenharia de Sistemas e Produtos

Filtros Digitais FIR e IIR

Fabrcio Simões

IFBA

01 de novembro de 2017

1 Filtro FIR

- Tipos de Filtros FIR
- Método de Projeto Usando Janelas
- Janela de Kaiser

2 Filtro Digital IIR

- Métodos de Projeto de Filtros IIR
- Filtros Analógicos: Uma Breve Abordagem
- Invariância do Impulso
- Exemplos
- Transformação Bilinear
- Exemplos

Resposta em Frequência Desejada

$$H(\omega) = R(\omega)e^{-jD\omega},$$

onde $R(\omega)$ é a magnitude e $-D\omega$, a fase. $D = M/2$ para M par e ímpar.

A depender da ordem M do filtro (par ou ímpar) e dos coeficientes b_m (simétrico e anti-simétrico), os filtros FIR podem ser classificados como:

- **Filtro Tipo I:** M é par e os coeficientes b_m são simétricos.

$$h[n] = h[M - n]$$

- **Filtro Tipo II:** M é ímpar, o atraso $D = M/2$ não é inteiro e os coeficientes b_m são simétricos.

$$h[n] = h[M - n]$$

Zeros: $z=-1$. Qual a influência desse zero na resposta em frequência $H(\omega)$?

- **Filtro Tipo III:** M é par e os coeficientes b_m são anti-simétricos.

$$h[n] = -h[M - n]$$

zeros: $z=\pm 1$. Qual a influência desse zero na resposta em frequência $H(\omega)$?

Tipos de Filtro FIR - Continuação

- **Filtro Tipo IV:** M é ímpar, $D = M/2$ não é inteiro e os coeficientes b_m são anti-simétricos.

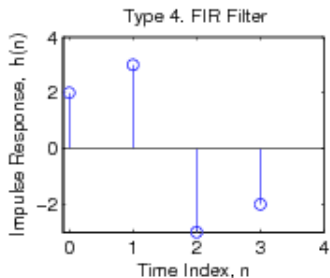
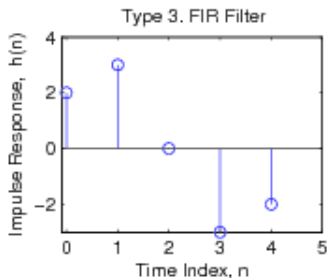
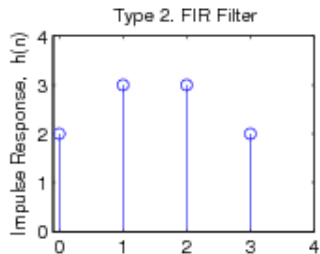
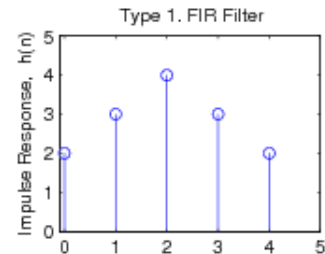
$$h[n] = -h[M - n]$$

Zeros: $z=1$. Qual a influência desse zero na resposta em frequência $H(\omega)$?

Tabela 1 : Filtros FIR

Tipo de Resposta	Tipo de Filtro FIR
Passa-Baixa	Tipo I ou II
Passa-Alta	Tipo I ou IV
Passa-Faixa	Qualquer Tipo
Rejeita-Faixa	Somente Tipo I

Tipos de Filtro FIR - Resposta ao Impulso



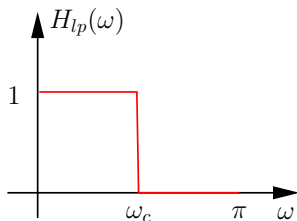
Projeto de um Filtro FIR : Considerações

São baseados em uma aproximação direta da resposta em frequência desejada

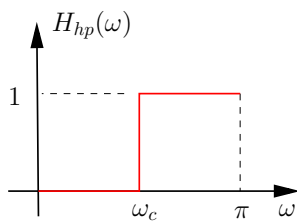
O método mais simples é chamado de *window method*. Esse método geralmente começa com uma resposta em frequência ideal desejada, $H_d(\omega)$.

Resposta em Frequência Desejada.

- 1 Considere as respostas em frequência IDEAIS a seguir:



$$h_{lp}[n] = \frac{\text{sen}((n-D)\omega_c)}{\pi(n-D)}$$



$$h_{hp}[n] = \frac{\text{sen}((n-D)\pi)}{\pi(n-D)} - \frac{\text{sen}((n-D)\omega_c)}{\pi(n-D)}$$

- 2 $h_d[n]$ é a resposta ao impulso de um sistema IIR e não-causal.

Como Obter um Filtro FIR Causal ?

- 1 Podemos obter um filtro FIR e causal $h[n]$ de ordem M , usando uma versão truncada da resposta $h_d[n]$

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & n = 0, 1, \dots, M \\ 0, & n < 0 \text{ e } n > M \end{cases} \quad (1)$$

- 2 O **truncamento** pode ser matematicamente escrito por

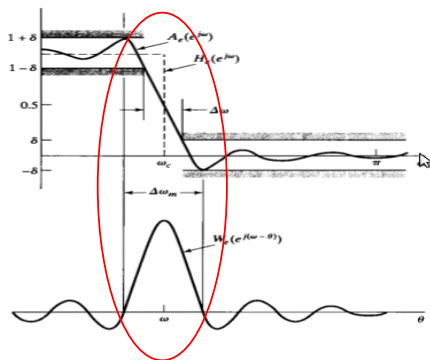
$$h[n] = h_d[n]w_r[n], \quad (2)$$

em que $w_r[n]$ é uma janela retangular.

Qual o Efeito do Truncamento ?

$$H(\omega) = \frac{H_d(\omega) \otimes W_r(\omega)}{2\pi}$$

$$|W_r(\omega)| = \frac{\text{sen}(\omega(M+1)/2)}{\text{sen}(\omega/2)}$$



Efeito da largura do lóbulo principal

Figura 1 : Efeito do truncamento sobre a resposta em frequência do filtro.

Como Reduzir o Efeito do Truncamento ?

- Para reduzir o efeito do fenômeno de *Gibbs*, deve-se usar janelas com **truncamento menos abrupto**.

Tabela 2 : Janelas : Equações

Tipo de Janela	Equação
Triangular	$w_2[n] = 1 - \frac{2 n-M/2 }{M}$
Hamming	$w_3[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/M)$
Blackman	$w_4[n] = 0,42 - 0,5 \cos(2\pi n/M) + 0,08 \cos(4\pi n/M)$

- Lóbulo principal estreito: A largura do lóbulo principal afeta a largura da banda de transição;
- Intensidade dos lóbulos laterais: Quanto maior, maior é a intensidade dos *ripples* na bandas de passagem e de rejeição.

Tabela 3 : Janelas : Comparação

Tipo de Janela	Amplitude (dB) (lóbulo lateral)	Largura Aproximada (lóbulo principal)
Retangular	-13	$4\pi/(M + 1)$
Triangular	-25	$8\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$

Exemplo de Projeto

- Considere o sinal $x(t) = \cos(100t) + \cos(500t)$. Projete um filtro passa-baixa de ordem $M=4$ para eliminar a frequência de 500 rad/s.
- Considerando a frequência máxima igual a 500 rad/s, adotou-se $\omega_a = 2000$ rad/s (tempo de amostragem $T = 3,14ms$).
- As frequências devem ser normalizadas no intervalo $\omega \sim [-\pi, \pi]$.

1 Freqüências normalizadas:

- $100 \implies 0,314 \text{ rad}$
- $500 \implies 1,57 \text{ rad}$
- $\omega_c = (0,314 + 1,57)/2 = 0,942 \text{ rad}$ - Uma regra prática.

2 Resposta ao impulso do filtro

$$h[n] = h_d[n] = \frac{\text{sen}((n-2)0,942)}{\pi(n-2)} \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots, 4$$

3 Equação de Diferenças :

$$y[n] = 0,1514(x[n] + x[n-4]) + 0,2574(x[n-1] + x[n-3]) + 0,2998x[n-2] \quad (3)$$

- Aplicando a *janela de Hamming*.

$$w_h[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/4)$$

$$h_h[n] = h[n]w_h[n] \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, 4$$

- Equação de Diferenças

$$y(n) = 0,0121(x[n] + x[n - 4]) + 0,139(x[n - 1] + x[n - 3]) + 0,2998x[n - 2] \quad (4)$$

Resposta em Frequência dos Filtros

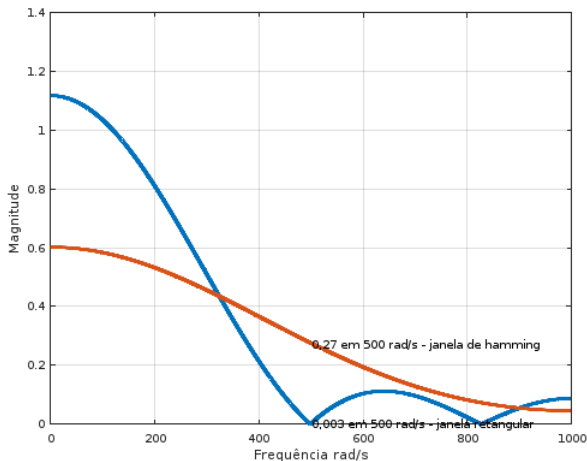


Figura 2 : Resposta em frequência usando janelas Retangular e de *Hamming*.

- Diferentemente dos métodos anteriores, usando a janela de **kaiser** é possível especificar os parâmetros do filtro. **Não existe tentativa e erro;**
- A equação da janela para $n = 0, 1, 2, \dots, M$ é dada por

$$w_k[n] = \frac{I_0(0,5M\beta\sqrt{(0,5M)^2 - (n - 0,5M)^2})}{I_0(0,5M\beta)}$$

em que β controla a relação entre a largura do lóbulo principal e a intensidade dos lóbulos laterais e $I_0(\cdot)$ é uma função de **bessel modificada de primeiro tipo**.

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(R_s - 8,7), & 50 < R_s \\ 0,5842(R_s - 21)^{0,4} + 0,07886(R_s - 21), & 21 \leq R_s \leq 50 \\ 0, & R_s < 21 \end{cases}$$

Equações de Projeto do Filtro Usando Janela de Kaiser

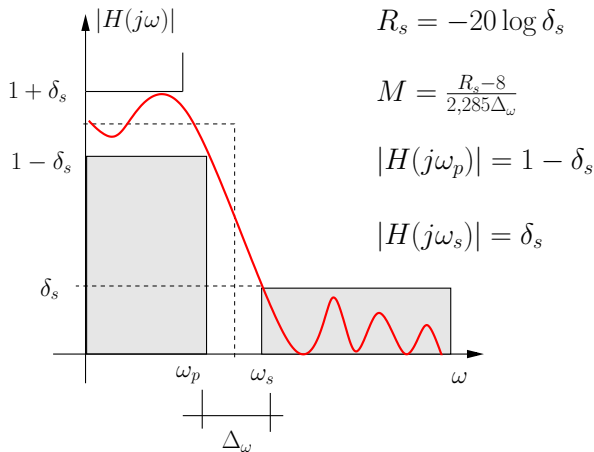


Figura 3 : Equações de Projeto e Gabarito do Filtro Passa-Baixa.

Tabela 4 : Obtendo outras janelas usando a de Kaiser

Tipo de Janela	$R_s = -20 \log(\delta_s)(dB)$	β	Δ_ω
Retangular	-21	0	$1,81 \pi/M$
Triangular	-25	1,33	$2,37 \pi/M$
Hamming	-53	4,86	$6,27 \pi/M$
Blackman	-74	7,04	$9,19 \pi/M$

Projeto de um Filtro Passa-Alta Usando Janela de Kaiser

- 1 Considere o sinal $x(t) = \cos(100t) + \cos(500t)$. Projete um filtro passa-alta de para atenuar a frequência de 100 rad/s.
- 2 Resposta em frequência do filtro passa-alta ideal

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c \\ e^{-j\omega M/2}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- 3 Resposta ao impulso de um filtro passa-alta ideal

$$h_{hp}[n] = \frac{\text{sen}(\pi(n - M/2))}{\pi(n - M/2)} - \frac{\text{sen}(\omega_c(n - M/2))}{\pi(n - M/2)}$$

Gabarito de Projeto do Filtro Passa-Alta

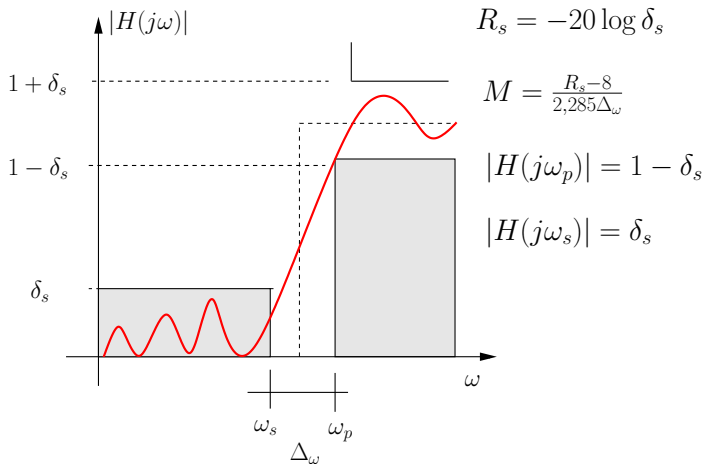


Figura 4 : Equações de Projeto e Gabarito do Filtro Passa-Alta.

1 Especificações do Filtro:

$$|H(\omega)| \leq \delta_s \text{ para } |\omega| \leq \omega_s$$

$$1 - \delta_s \leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta_s,$$

em que $\delta_s = 0,01$, **redução do sinal por um fator de 100**, $\omega_p = 450$ e $\omega_s = 150$ rad/s ($\Delta_\omega = 350$ rad/s).

2 Parâmetros da Janela :

$$\Delta_\omega = 0,376 \text{ valor normalizado}$$

$$R_s = -20 \log \delta_s = 40$$

$$M = \frac{40 - 8}{2,285(0,376)} = 38$$

- 1 Para obter um **Filtro FIR tipo I**, adotou-se $M=38$;
- 2 Como $21 \geq R_s \leq 50$, então

$$\beta = 0,5842(40 - 21)^{0,4} + 0,07886(R_s - 21) = 3,395$$

- 3 Resposta ao impulso do filtro

$$h[n] = h_{hp}[n] \frac{I_0(0,5M\beta \sqrt{(0,5M)^2 - (n - 0,5M)^2})}{I_0(0,5M\beta)},$$

$$\text{para } \omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$$

Filtro FIR - Características

- 1 Filtro FIR é sempre estável;
- 2 Filtros FIR são empregados em problemas de filtragem onde exigem resposta de fase linear;
- 3 É possível projetar filtro FIR causal com fase linear se sua resposta ao impulso satisfaz a condição $h(n) = \pm h(M - n)$ para $n = 0, 1, 2, \dots, M$, ou seja, $h[n]$ é simétrico ou antisimétrico;
- 4 Comparando ao filtro IIR, a ordem do filtro FIR para atender as especificações desejadas é maior.

Discretização de Filtros Analógicos

- Invariância do Impulso;

$$h(nT) = Th_c(t)|_{t=nT}$$

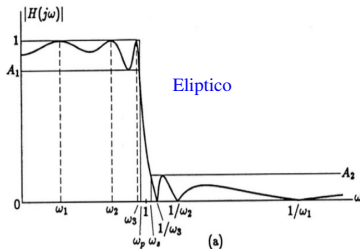
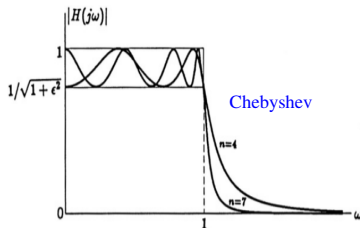
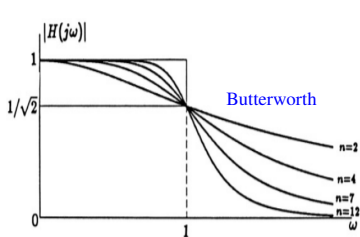
- Transformação Bilinear.

$$H(z) = H_c(s)|_{s=\alpha\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}$$

Filtros Analógicos

Aproximações para $|H(\omega)|$

Tipos de resposta em frequência de filtros ordem ≥ 2 .



Invariância do Impulso

Invariância do Impulso

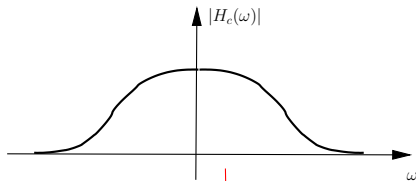
- O método consiste em discretizar um projeto de um filtro analógico segundo a equação abaixo

$$h(nT) = Th_c(t)|_{t=nT}$$

- Nesse método, estamos interessados na relação entre a resposta em frequência do sistema contínuo e a resposta em frequência do sistema discreto.

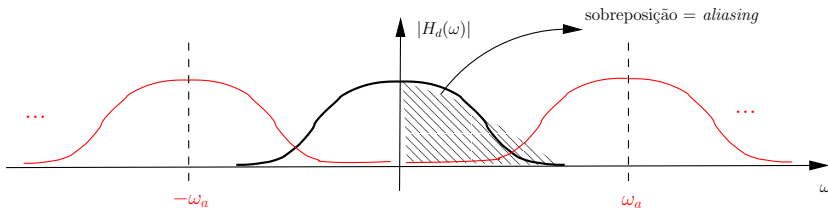
$$H_d(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c(\omega - k\omega_a)$$

Resposta em Frequência do Filtro Contínuo

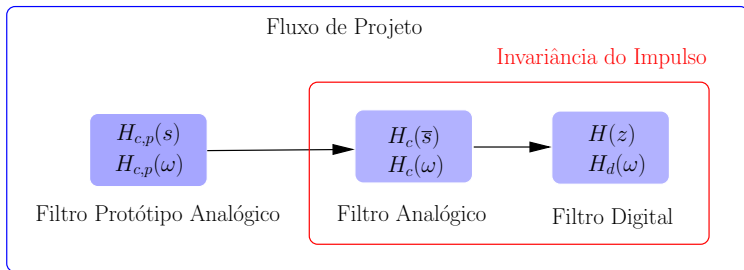


Diferenças entre o Filtro Analógico e Digital
Devido ao *Aliasing*

Digitalização do Filtro Analógico



- As especificações de projeto de um **filtro digital** são usadas no projeto de um **filtro analógico** com função de transferência $H_c(\bar{s})$; .
- Graficamente, o fluxo de projeto pode ser representado como



1 Considere $H_c(\bar{s})$ representada por uma soma de frações parciais

$$H_c(\bar{s}) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\bar{s} - \bar{s}_k}$$

2 Aplicando **Transformada Inversa de Laplace** sobre $H_c(\bar{s})$, obtém-se:

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{\bar{s}_k t}$$

3 Fazendo $h(nT) = Th_c(t)|_{t=nT}$ para $T = 1s$, obtém-se

$$h[n] = \sum_{k=1}^N A_k e^{\bar{s}_k n} u[n]$$

4 Aplicando a Transformada Z sobre $h[n]$

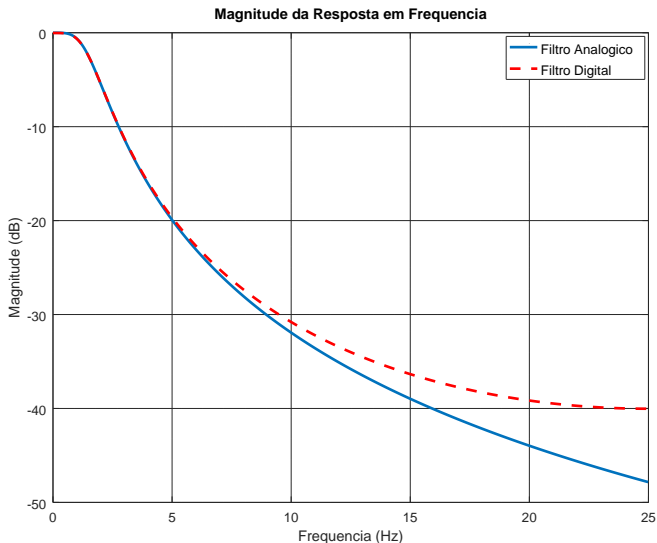
$$H(z) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{1 - e^{\bar{s}_k} z^{-1}} = \sum_{k=1}^N A_k \frac{z}{z - e^{\bar{s}_k}}$$

5 O sistema obtido é causal e estável ?

Exemplo de Projeto 1

- Filtro Digital Passa-Baixas Butterworth de ordem 2;
- Tempo de Amostragem $T = 0,02$ s;
- $\omega_p = 10$ rad/s.

Resposta em Frequência dos Filtros Analógicos e Digitais



Exemplo de Projeto 2

- Filtro Digital Passa-Faixa Butterworth de ordem 4;
- Tempo de Amostragem $T = 0,02$ s;
- $\omega_{pl} = 9$ rad/s;
- $\omega_{pu} = 11$ rad/s;

Filtro Passa-Faixa Digital

- 1 Projeto do filtro analógico passa-faixa. Frequências ω_{pl} e ω_{pu} normalizadas;

$$[b,a] = \text{butter}(N/2, [\omega_{pl} \ \omega_{pu}], 's')$$

$$H(\bar{s}) = \frac{0,0016\bar{s}^2}{\bar{s}^4 + 0,056\bar{s}^3 + 0,081\bar{s}^2 + 0,0022\bar{s} + 0,0016}$$

- 2 Filtro Digital

$$[bz,az] = \text{impinvar}(b,a,F_s). \quad F_s = 1 \text{ devido a normalização.}$$

$$H(z) = \frac{0,0015z^{-1} - 0,0031z^{-2} + 0,0015z^{-3}}{1 - 3,867z^{-1} + 5,68z^{-2} - 3,757z^{-3} + 0,94z^{-4}}$$

- 3 Qual a equação de diferenças ?

Exemplo de Projeto 3

- Filtro Digital de Chebyshev de ordem 2;
- Tempo de Amostragem $T = 0,02$ s;
- $r_p = 0,89$;
- $\omega_p = 10$ rad/s.

Filtro Passa-Baixas Digital

- 1 Projeto do filtro analógico passa-baixas - $[b,a] = \text{cheby1}(N,R,\omega_p,'s')$
 $R = -20 \log(r_p)$

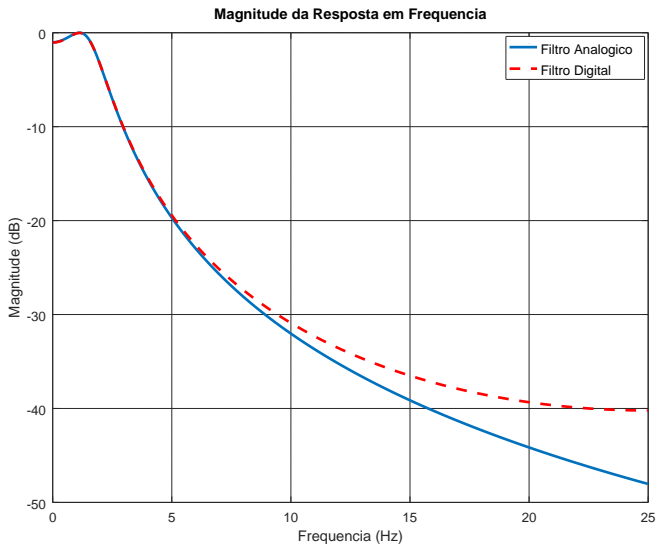
$$H(\bar{s}) = \frac{0,039}{\bar{s}^2 + 0,22\bar{s} + 0,044}$$

- 2 Filtro Digital
 $[bz,az] = \text{impinvar}(b,a,F_s)$

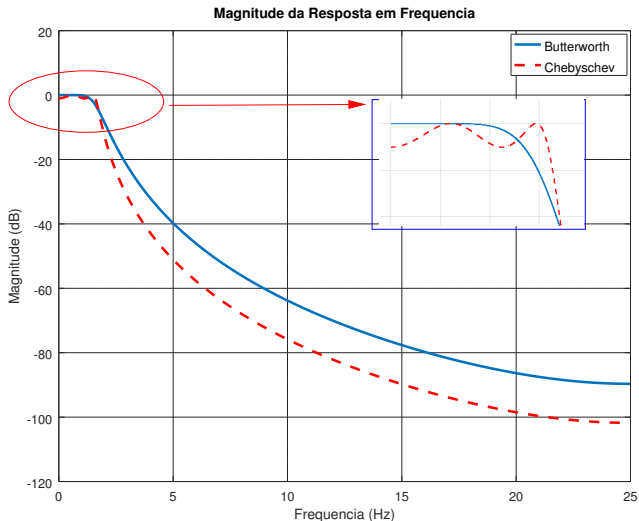
$$H(z) = \frac{0,0348z^{-1}}{1 - 1,76z^{-1} + 0,803z^{-2}}$$

- 3 Qual a equação de diferenças ?

Resposta em Frequência dos Filtros Analógicos e Digitais

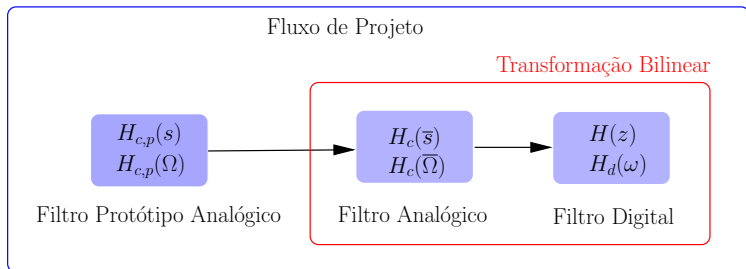


Comparação entre os Filtros Butterworth e Chebyshev



Transformação Bilinear

Transformação Bilinear: Fluxo de Projeto



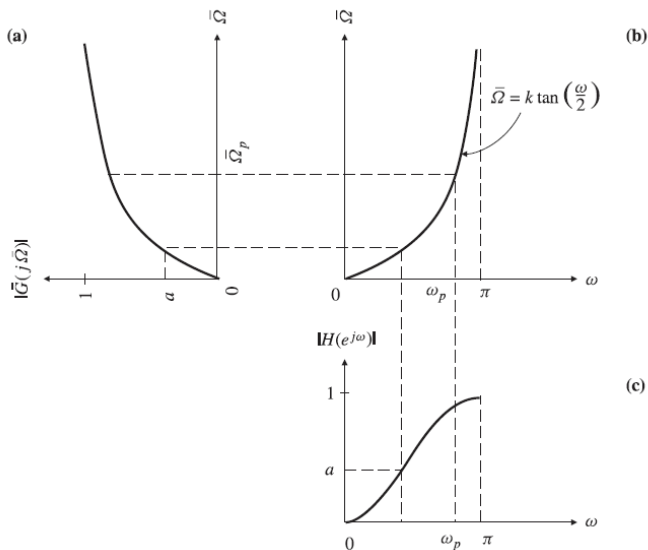
- O método elimina o efeito de *aliasing* usando uma transformação **não-linear** entre a variável complexa \bar{s} e a variável z a partir das equações

$$\bar{s} = \alpha \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right), \text{ e } \bar{\Omega} = \alpha \tan(\omega/2)$$

α é uma constante positiva e arbitrária.

Transformação entre $H_c(\omega)$ e $H_d(\omega)$

- Considerando $T = 1$ s.



- 1 Considere o filtro analógico $H_c(\bar{s})$ representado por frações parciais

$$H_c(\bar{s}) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\bar{s} - \bar{s}_k},$$

onde A_k é uma constante e s_k , os pólos do sistema.

- 2 Aplicando a relação entre as variáveis \bar{s} e z , obtém-se

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\alpha \frac{z-1}{z+1} - \bar{s}_k}$$

3 Fazendo $\alpha=1$, $H(z)$ é reescrita como

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\frac{z-1}{z+1} - \bar{s}_k}$$

Relações entre \bar{s} e ω para $\alpha = 1$

$$\bar{s} = \frac{z-1}{z+1}$$

$$\bar{\Omega} = \tan(\omega/2)$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\frac{z-1}{z+1} - \bar{s}_k}$$

- Analisando os pólos de $H(z)$.

$$\frac{z_k - 1}{z_k + 1} - \bar{s}_k = 0$$

$$z_k = \frac{1 + s_k}{1 - s_k} = \frac{1 + \sigma_k + j\bar{\Omega}_k}{1 - \sigma_k - j\bar{\Omega}_k}$$

- Se os pólos s_k são estáveis, $\sigma_k < 0$. Portanto,

$$|z_k| = \frac{\sqrt{(1 + \sigma_k)^2 + (\bar{\Omega}_k)^2}}{\sqrt{(1 - \sigma_k)^2 + (\bar{\Omega}_k)^2}} < 1$$

Exemplo de Projeto 1

- Filtro Digital Passa-Altas Butterworth de ordem 2;
- Tempo de Amostragem $T = 0,02$ s;
- $\omega_p = 40$ rad/s.

- 1 Usando o comando `[b,a] = butter(N,ωp, 'high', 's')`. Frequência ω_p normalizada.

$$H_c(\bar{s}) = \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}^2 + 1,13\bar{s} + 0,64}$$

- 2 Transformação do filtro analógico usando `[bz,az] = bilinear(b,a, T)`

$$H(z) = \frac{0,58 - 1,15z^{-1} + 0,58z^{-2}}{1 - 0,97z^{-1} + 0,34z^{-2}}$$

- 3 Qual é a equação de diferenças ?

Exemplo

- Filtro digital Butterworth passa-baixas de ordem 2;
- Tempo de Amostragem $T = 0,02$ s;
- $\omega_p = 40$ rad/s.

- 1 Usando o comando `[b,a] = butter(N,ωp, 's')`. Frequência ω_p normalizada.

$$H_c(\bar{s}) = \frac{0,64}{\bar{s}^2 + 1,13\bar{s} + 0,64}$$

- 2 Transformação do filtro analógico usando `[bz,az] = bilinear(b,a,T)`

$$H(z) = \frac{0,093 + 0,185z^{-1} + 0,092z^{-2}}{1 - 0,973z^{-1} + 0,344z^{-2}}$$

- 3 Qual é a equação diferença ?

Comparação entre os Filtros Analógico e Digital

